



Đặt tên các điểm như hình vẽ.

Chú ý: Hình vẽ ở TH2 trên đề bài có nhầm lẫn. Giả thiết đúng là G là giao điểm của hai đường tròn $(O_1; r_1 + w_3)$ và $(O_2; r_2 + w_2)$

Ý tưởng của bài toán : Ta tính diện tích một phần hình vành khăn ABCI và CDEF. Sau đó tính diện tích phần búp măng GCHI. Muốn tính diện tích GCHI, ta tính diện tích hai cung tròn GO_1I và GO_2C ; sau đó tính diện tích hình tam giác GO_1O_2 .

$$\text{Khi đó } S_{GCHI} = S_{GO_1I} + S_{GO_2C} - S_{GO_1O_2}$$

Trường hợp 1 là trường hợp đặc biệt của TH2 nên ta giải chung cho TH2.

Lời giải được trình bày như sau:

Ta tính các diện tích:

$$S_{AO_1I} = \frac{\pi(r_1 + w_3)^2}{4}; S_{CO_2F} = \frac{\pi(r_2 + w_2)^2}{4}$$

$$S_{BO_1C} = \frac{\pi r_1^2}{4}; S_{DO_2E} = \frac{\pi r_2^2}{4}$$

Vậy thì:

$$S_{ABCI} = \frac{\pi[(r_1 + w_3)^2 - r_1^2]}{4}; S_{CDEF} = \frac{\pi[(r_2 + w_2)^2 - r_2^2]}{4}$$

Gọi $\widehat{GO_1O_2} = \alpha$; $\widehat{GO_2O_1} = \beta$ thì

$$S_{GO_1I} = \frac{\pi(r_1 + w_3)^2 \alpha}{360}; S_{GO_2C} = \frac{\pi(r_2 + w_2)^2 \beta}{360}$$

Tới đây, ta tìm biểu diễn của α ; β theo các đại lượng đã cho.

Do tam giác CGK vuông tại G, $GH \perp CK$ nên

$$GH^2 = CH \cdot HK = CH[2(r_2 + w_2) - CH] = 2CH(r_2 + w_2) - CH^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } GH^2 = 2(w_3 - CH)(r_1 + w_3) - (w_3 - CH)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$2CH(r_2 + w_2) - CH^2 = 2(w_3 - CH)(r_1 + w_3) - (w_3 - CH)^2$$

$$\Leftrightarrow 2CH(r_2 + w_2) - CH^2 = 2w_3(r_1 + w_3) - 2CH(r_1 + w_3) - w_3^2 + 2CHw_3 - CH^2$$

$$\Leftrightarrow CH = \frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)}$$

$$\text{Lại có } \sin \alpha = \frac{CH}{r_1 + w_3} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_1 + w_3)}\right)$$

$$\text{Tương tự } \sin \beta = \frac{CH}{r_2 + w_2} \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_2 + w_2)}\right)$$

$$\text{Suy ra } S_{GO_1I} = \frac{\pi(r_1 + w_3)^2}{360} \cdot \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_1 + w_3)}\right)$$

$$S_{GO_2C} = \frac{\pi(r_2 + w_2)^2}{360} \cdot \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_2 + w_2)}\right)$$

$$\text{Và } S_{GO_1O_2} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + w_2) \cdot \frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)} = \frac{2w_3r_1 - w_3^2}{4(r_1 + r_2 + w_2)^2}$$

Vậy diện tích hình búp măng GCHI bằng:

$$\frac{\pi(r_1 + w_3)^2}{360} \cdot \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_1 + w_3)}\right) + \frac{\pi(r_2 + w_2)^2}{360} \cdot \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_2 + w_2)}\right) - \frac{2w_3r_1 - w_3^2}{4(r_1 + r_2 + w_2)^2}$$

Từ đó ta tính được:

$$S_{ABCDEFG} = S_{ABCI} + S_{CDEF} - S_{GCHI}$$

$$= \frac{\pi[(r_1 + w_3)^2 - r_1^2]}{4} + \frac{\pi[(r_2 + w_2)^2 - r_2^2]}{4}$$

$$- \frac{\pi(r_1 + w_3)^2}{360} \cdot \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_1 + w_3)}\right) + \frac{\pi(r_2 + w_2)^2}{360} \cdot \arcsin\left(\frac{2w_3r_1 - w_3^2}{2(r_1 + r_2 + w_2)(r_2 + w_2)}\right) - \frac{2w_3r_1 - w_3^2}{4(r_1 + r_2 + w_2)^2}$$